

# CONTRACTION QUASI-STATIQUE D'UNE CAVITÉ A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE OU CYLINDRIQUE DANS UN MILIEU ÉLASTO-PLASTIQUE

par J. SALENÇON  
Ingénieur des Ponts et Chaussées (1)

## RÉSUMÉ

On étudie la contraction d'une cavité sphérique ou cylindrique dans un milieu infini. Le matériau constituant le massif est isotrope, homogène, et obéit au critère de plasticité de Coulomb. L'élasticité est linéaire. La loi de comportement plastique adoptée permet une variation de volume permanente en supposant la compressibilité en phase plastique indépendante des déformations. On néglige l'influence des forces de masse.

Les résultats obtenus concernent les variations du rayon de la cavité et du rayon de la frontière de la zone plastifiée en fonction de la pression à l'intérieur de la cavité.

## SUMMARY

### The quasi-static contraction of a spherical or cylindrical cavity in an elasto-plastic medium

Considering a spherical or cylindrical cavity in an infinite medium, we study its quasi-static contraction as the inside pressure is progressively made to decrease. The material is supposed to be isotropic and homogeneous and to obey Coulomb's yield criterion. We give the elasto-plastic solution of this problem, for a constitutive equation allowing a permanent change in volume, the rate of which is independent of strain.

Formulas are obtained relating the radius of the cavity, the radius of the border between the elastic and plastic zones, and the inside pressure.

## 1. INTRODUCTION.

Nous étudions ici la contraction quasi-statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto-plastique. Ce problème qui concerne par exemple les stockages souterrains d'hydrocarbures, a été posé au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique par Gaz de France et Géostock.

(1) Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique.



Nous avons traité, dans une publication antérieure (\*), le cas de l'expansion d'une cavité dans des conditions analogues. Nous n'entrerons pas à nouveau dans les détails de théorie ou de calculs largement exposés alors, mais nous indiquerons les modifications apportées dans les résultats par l'inversion du sens de l'écoulement.

## 2. NOTATION.

Les notations sont identiques à celles utilisées dans (\*), que nous rappelons brièvement :

Le matériau obéit au critère de Coulomb et on désigne par  $C$  la cohésion et  $\varphi$  l'angle de frottement interne :

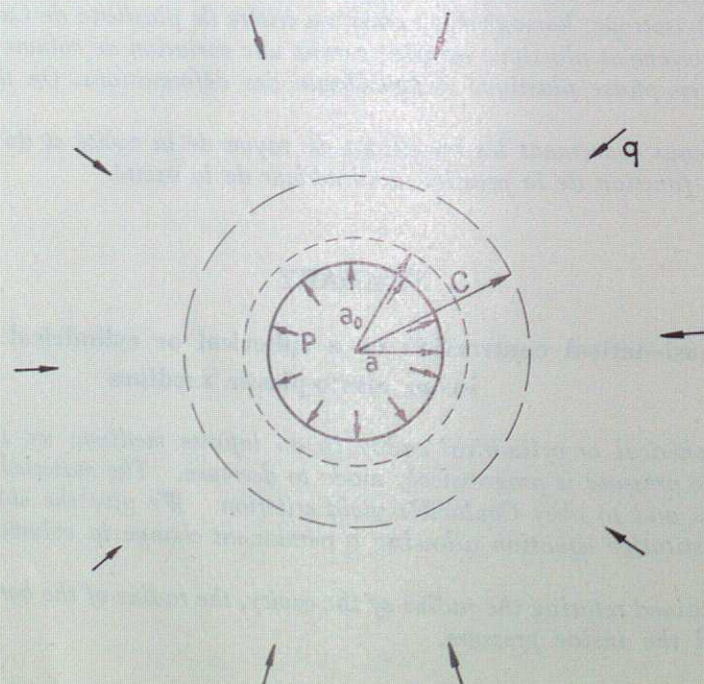
On pose :

$$H = C \cotg \varphi, \quad K_a = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad K_p = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

$a$  est le rayon actuel de la cavité et  $a_0$  la valeur initiale de ce rayon.  $c$  est le rayon de la frontière entre les zones élastique et plastique.

$\xi$  désigne le déplacement radial du point matériel de coordonnées actuelle  $r$ , et initiale  $r_0$ .

$p$  est la pression à l'intérieur de la cavité et  $q$  la pression à l'infini constante. Les contraintes  $\sigma_i$  sont comptées positivement en traction,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les contraintes principales.



## 3. CRITÈRE DE PLASTICITÉ ET LOI DE COMPORTEMENT PLASTIQUE.

### 3.1. Cas où les trois contraintes principales sont distinctes :

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Le critère s'écrit :

$$\begin{cases} (\sigma_1 - H) \leq 0 \\ (\sigma_1 - H) = K_a (\sigma_3 - H) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (\sigma_1 - H) \leq 0 \\ (\sigma_3 - H) = K_p (\sigma_1 - H) \end{cases}$$

Comme nous l'avons fait dans (\*), nous supposons que la vitesse de déformation plastique, dont les directions principales sont les mêmes que celles des contraintes (isotropie), a pour composantes :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda} \\ \dot{\epsilon}_2^p = 0 \\ \dot{\epsilon}_3^p = -k\dot{\lambda} \end{cases} \quad \dot{\lambda} > 0 \text{ et } k > 0 \text{ quelconques.}$$

( $k = 1$  : hypothèse de Mohr;  $k = K_a$  : hypothèse du potentiel plastique identique au critère de plasticité).

La vitesse de dilatation volumique est :  $(1 - k) \dot{\lambda}$ .

### 3.2. Cas où deux contraintes principales sont égales :

Si  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ , la vitesse de déformation permanente a pour valeurs principales :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda} + \dot{\mu} \\ \dot{\epsilon}_2^p = -k\dot{\lambda} \\ \dot{\epsilon}_3^p = -k\dot{\mu} \end{cases} \quad \dot{\lambda} > 0, \dot{\mu} > 0, k > 0 \text{ quelconques.}$$

## 4. CONTRACTION D'UNE CAVITÉ SPHÉRIQUE.

Le problème étudié est celui de la contraction d'une cavité sphérique de rayon initial  $a_0$ , lorsque la pression  $p$  à l'intérieur de la cavité décroît à partir de la valeur  $q$  (on admet même que  $p$  puisse devenir négative), la pression à l'infini étant invariable égale à  $q$ .

Les contraintes principales sont :

$$\sigma_r = \sigma_1 > \sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_\phi = \sigma_3.$$

Au début de la baisse de pression, tant que la variation de pression reste suffisamment faible (ce terme sera expliqué par la suite), l'état de contraintes est élastique dans tout le massif; c'est la solution de Lamé. On a :

$$a = a_0 \left[ 1 + (p - q) \frac{1 + \nu}{2E} \right]$$

Lorsque la variation de pression devient suffisamment grande, une zone plastique apparaît, entourant la cavité et limitée par une sphère de rayon  $c$ .

Dans la zone plastique ( $a \leq r \leq c$ ), le critère de plasticité est satisfait en tout point et s'écrit :

$(\sigma_\theta - H) = K_p (\sigma_r - H)$ . Il y a continuité de  $\sigma_r$  à la traversée de la frontière élastoplastique. D'autre part le critère de plasticité étant satisfait sur cette frontière dans la zone élastique et dans la zone plastique, il y a aussi continuité de  $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ . En intégrant alors l'équation d'équilibre on obtient les formules (2') et (3') qui remplacent (2) et (3) de (\*):

$$(2') \quad (\sigma_r - H) = -(q + H) \frac{3}{1 + 2K_p} \left( \frac{c}{r} \right)^{2(1-K_p)}$$

$$(3') \quad p = -H - (q + H) \frac{3}{1 + 2K_p} \left( \frac{c}{a} \right)^{2(1-K_p)}$$

(On vérifiera *a posteriori* que  $(\sigma_r - H) \leq 0$  dans tout le solide.)



La pression d'apparition de la zone plastique est d'après (2') :

$$(9') \quad p_0 = -H - (q + H) \frac{3}{1 + 2K_p}$$

Les déformations n'étant pas supposées infiniment petites, les formules (2') et (3') ne sont valables qu'en coordonnées d'Euler et il est nécessaire de déterminer la relation existant entre les valeurs  $a$  et  $c$  pour étudier la variation de  $p$ .

A la différence du cas de l'expansion, il n'est pas évident *a priori* que  $c$  puisse être utilisé comme paramètre cinématique. Nous considérons donc  $t$ , paramètre cinématique quelconque, fonction monotone croissante du temps physique, en conservant à  $v$  la même signification que dans (\*) c'est-à-dire :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial c} (r_0, c).$$

Dans la zone plastique on a alors pour la vitesse de déformation totale, somme de la vitesse de déformation élastique et de la vitesse de déformation plastique :

$$(4') \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dc}{dt} = \left[ \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta - \nu \sigma_\varphi) - k \frac{d\lambda + d\mu}{dc} \right] \frac{dc}{dt} \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v}{r} \frac{dc}{dt} = \left[ \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r - \nu \sigma_\varphi) + \frac{d\lambda}{dc} \right] \frac{dc}{dt} \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{v}{r} \frac{dc}{dt} = \left[ \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \frac{d\mu}{dc} \right] \frac{dc}{dt} \end{cases}$$

avec  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$  et  $d\lambda = d\mu$  par raison de symétrie; d'où après élimination de  $\frac{d\lambda}{dc}$  et simplification par  $\frac{dc}{dt}$  (qui n'est impossible que si  $v \rightarrow \infty$ , ce qui ne se produit pas comme on le vérifiera *a posteriori*) :

$$(6') \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{k} \frac{v}{r} = \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{2}{k} \nu \right) \frac{d\sigma_r}{dc} - \frac{1}{E} \left[ \frac{2}{k} (1 - \nu) - 2\nu \right] \frac{d\sigma_\theta}{dc}$$

A partir de (2'), (6') et du critère de plasticité, il est possible d'intégrer, comme nous l'avons fait dans (\*), et d'obtenir la fonction  $r(r_0, c)$ , donnant la coordonnée actuelle  $r$  d'un point de coordonnée initiale  $r_0$  en fonction de la valeur actuelle du rayon de la frontière élasto-plastique.

Il importe de remarquer que les formules de base pour cette intégration se déduisent des formules correspondantes de (\*) en remplaçant  $K_a$  par  $K_p$  et  $k$  par  $1/k$ . Il en est donc de même dans les formules finales qui s'obtiennent ainsi immédiatement. En particulier dans le cas où  $k = 1$  (pas de variation de volume permanente) on obtient :

avec le critère de Coulomb :

$$\begin{cases} r^3 = r_0^3 + \frac{3(q+H)}{E} (1-2\nu) r_0^3 - \frac{9(q+H)}{E} \times \frac{1}{1+2K_p} (1-2\nu) r_0^{1+2K_p} c^{2(1-K_p)} + \frac{9(q+H)}{E} \times \frac{1-K_p}{1+2K_p} (1-\nu) c^3 \\ p = -H + (q+H) \frac{3}{1+2K_p} \left( \frac{c}{a} \right)^{2(1-K_p)} \end{cases}$$

Avec le critère de Tresca : (il faut remplacer  $C$  par  $-C$  dans les formules correspondantes de (\*)).

$$\begin{cases} r^3 = r_0^3 + \frac{4C}{E} (1-2\nu) r_0^3 + \frac{12C}{E} (1-2\nu) r_0^3 \text{Log} \frac{c}{r_0} - \frac{6C}{E} (1-\nu) c^3 \\ p = q - 4C \left( \text{Log} \frac{c}{a} + \frac{1}{3} \right) \end{cases}$$

Dans (\*), pour le problème de l'expansion, nous avons mis en évidence l'existence d'une pression limite, finie, correspondant à l'expansion infinie de la cavité ( $a \rightarrow \infty$  et  $c \rightarrow \infty$ ). Ici, la pression limite à

envisager est celle pour laquelle la cavité se trouve complètement écrasée,  $a = 0$  :

$$\begin{aligned} p_{lim} &= -H \text{ dans le cas du critère de Coulomb;} \\ p_{lim} &= -\infty \text{ dans le cas du critère de Tresca.} \end{aligned}$$

Par une étude précise des formules données ci-dessus on voit que  $c$  est une fonction monotone croissante du temps (1) ( $da$  et  $dc$  sont toujours de signes contraires), et que  $c_{lim}$  est finie.

## 5. CONTRACTION D'UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE.

Le problème étudié est l'homologue de celui du § 4 pour une cavité cylindrique circulaire infiniment longue.  $Oz$  étant dirigé suivant l'axe de la cavité, on fait l'hypothèse que  $\sigma_z$ , uniforme, est contrainte principale intermédiaire. Les contraintes principales sont ainsi :

$$\sigma_r = \sigma_1, \quad \sigma_z = \sigma_2, \quad \sigma_\theta = \sigma_3.$$

Au début de la baisse de pression, tant que la variation de la pression à l'intérieur de la cavité reste suffisamment petite, l'état de contraintes est élastique dans tout le massif (solution de Lamé) et on a :

$$a = a_0 \left[ 1 + (p - q) \frac{1 + \nu}{E} \right]$$

Une zone plastique apparaît ensuite lorsque la variation de pression devient suffisamment grande : c'est un anneau entourant la cavité limité par un cylindre concentrique de rayon  $c$ . Dans cette zone le critère de plasticité vérifié en tout point est :  $(\sigma_\theta - H) = K_p (\sigma_r - H)$ . Il y a continuité de  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  (et évidemment de  $\sigma_z$  uniforme) à la traversée de la frontière élastoplastique, et, par intégration de l'équation d'équilibre on obtient les formules homologues de (2') et (3') :

$$(2'') \quad (\sigma_r - H) = - (q + H) \frac{2}{1 + K_p} \left( \frac{c}{r} \right)^{1-K_p}$$

$$(3'') \quad p = - (q + H) \frac{2}{1 + K_p} \left( \frac{c}{a} \right)^{1-K_p}$$

(on vérifiera *a posteriori* que  $(\sigma_r - H) \leq 0$  dans tout le solide).

La pression d'apparition de la zone plastique est :

$$(9'') \quad p_0 = -H - (q + H) \frac{2}{1 + K_p}$$

En procédant comme au § 4 (introduction de  $t$ , paramètre cinématique, en conservant à  $v$  le sens de dérivée par rapport à  $c$  on obtient pour la vitesse de déformation totale :

$$(4'') \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial v}{\partial r} \times \frac{dc}{dt} = \left[ \frac{1}{E} \times \frac{d}{dc} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta - \nu \sigma_z) + \frac{d\lambda}{dc} \right] \frac{dc}{dt} \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v}{r} \times \frac{dc}{dt} = \left[ \frac{1}{E} \times \frac{d}{dc} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r - \nu \sigma_z) - k \frac{d\lambda}{dc} \right] \frac{dc}{dt} \\ \dot{\varepsilon}_z = 0 = \left[ \frac{1}{E} \times \frac{d}{dc} (\sigma_z - \nu \sigma_r - \nu \sigma_\theta) \right] \frac{dc}{dt} \end{cases}$$

d'où :

$$(6'') \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{k} \frac{v}{r} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{d}{dc} \sigma_r \left( 1 - \nu - \frac{1}{k} \nu \right) + \frac{1 + \nu}{E} \frac{d}{dc} \sigma_\theta \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \nu - \nu \right)$$

(1)  $c$  pourrait être pris comme paramètre cinématique.



Comme au § 4, les formules de base [(2''), (6'')] et critère de plasticité] pour le calcul de  $r(r_0, c)$ , s'obtiennent à partir des formules correspondantes de (\*) en changeant  $K_a$  en  $K_p$  et  $k$  en  $1/k$ . On a donc immédiatement les formules finales. Pour  $k = 1$  :

Avec le critère de Coulomb :

$$\begin{cases} r^2 = r_0^2 + \frac{2(q+H)}{E} (1-2\nu) (1+\nu) r_0^2 - \frac{4(q+H)}{E} \times \frac{1}{1+K_p} (1-2\nu) (1+\nu) r_0^{1+K_p} c^{1-K_p} + \frac{4(q+H)}{E} \times \frac{1-K_p}{1+K_p} (1-\nu^2) c^2 \\ p = -H + (q+H) \frac{2}{1+K_p} \left(\frac{c}{a}\right)^{1-K_p} \end{cases}$$

Avec le critère de Tresca :

$$\begin{cases} r^2 = r_0^2 + \frac{2C}{E} (1+\nu) (1-2\nu) r_0^2 + \frac{4C}{E} (1-2\nu) (1+\nu) r_0^2 \text{Log} \frac{c}{r_0} - \frac{4C}{E} (1-\nu^2) c^2 \\ p = q - C \left(1 + 2 \text{Log} \frac{c}{a}\right) \end{cases}$$

Les mêmes remarques que dans le cas de la cavité sphérique sont valables. La pression limite correspondant à l'écrasement complet de la cavité est :

$p_{lim} = -H$  dans le cas du critère de Coulomb,  $p_{lim} = -\infty$  dans le cas de celui de Tresca.

$c$  est une fonction monotone croissante jusqu'à  $c_{lim}$  fini.

### RÉFÉRENCES

[\*] J. SALENÇON : Expansion quasi-statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto-plastique, *Annales des Ponts et Chaussées*, 1966, III.

## CHRONIQUE DE JURISPRUDENCE

### JURISPRUDENCE DU CONSEIL D'ÉTAT

TRAVAUX PUBLICS. — DOMMAGES DE TRAVAUX PUBLICS. — NOTION. — QUESTIONS GÉNÉRALES. — COLLECTIVITÉ OU PERSONNE RESPONSABLE. — RÉPARATION. — ÉTAT OU COMMUNE. — PARTAGE DE RESPONSABILITÉ ENTRE L'ÉTAT ET UNE COMMUNE. — DOMMAGES DE TRAVAUX PUBLICS. — DIFFÉRENTES CATÉGORIES DE DOMMAGES. — DOMMAGES SUR LES VOIES PUBLIQUES TERRESTRES. — DÉFAUT DE SIGNALISATION. — NAPPE VERGLACÉE DUE À UNE FUITE PROVENANT D'UNE BORNE-FONTAINE.

(23 février 1968. — 70.586. *Ministre de l'Équipement c/ Lamiaux et commune de Sapignies*. — MM. Hadas-Lebel, rapp.; Galmot, c. du g.; M<sup>e</sup> Cail, av.). — Recueil Lebon, p. 140 (1).

Recours du ministre de l'Équipement, tendant à l'annulation d'un jugement du 11 mai 1966 par lequel le Tribunal administratif de Lille a condamné l'État conjointement et solidairement avec la commune de Sapignies (Pas-de-Calais) à payer au sieur Lamiaux (René) la somme de 3 200 F ainsi que les intérêts au taux légal à compter du 31 mars 1964, en réparation des conséquences dommageables de l'accident survenu le 6 décembre 1962 audit

sieur Lamiaux sur la route nationale n° 37 dans la traversée de Sapignies et a rejeté la demande en garantie formée par l'État contre ladite commune;

Vu la loi du 28 pluviôse an VIII; l'ordonnance du 31 juillet 1945 et le décret du 30 septembre 1953;

Considérant qu'il résulte de l'instruction que le 6 décembre 1962, vers quatre heures du matin, sur la R.N. n° 37, dans la traversée de l'agglomération de Sapignies (Pas-de-Calais), une automobile, appartenant au sieur Lamiaux et conduite par lui, a dérapé sur une couche de glace d'une longueur de 50 mètres et d'une largeur de 4 mètres, qui s'était formée trois jours auparavant et qui n'était, au moment de l'accident, ni sablée, ni signalée;

Sur les conclusions principales du recours susvisé :

— Considérant que, sans contester le défaut d'entretien normal de la partie de la voie publique où l'accident s'est produit, le ministre de l'Équipement se borne à soutenir que les conclusions de la demande du sieur Lamiaux qui tendent à ce que l'État soit condamné à l'indemniser des conséquences dommageables de cet accident, devraient être rejetées comme mal dirigées;

Considérant que l'entretien d'une route nationale, même dans la traversée d'une agglomération, incombe à l'État; que, par suite, le défaut d'entretien normal de la route nationale n° 37, qui est en relation directe de cause à effet avec l'accident dont le sieur Lamiaux a été victime, est susceptible d'engager envers ce dernier la responsabilité de l'État, sous réserve de la faculté ouverte à ce dernier

(1) Il s'agit ici comme dans toute la suite de la chronique du recueil des décisions du Conseil d'État, du Tribunal des conflits et des jugements des tribunaux administratifs (Paris, librairie Sirey).

N.B. — Les décisions ou jugements ont été choisis et les résumés rédigés par M. Godot, ingénieur général des Ponts et Chaussées en retraite.